

L'ARITHMETIQUE AU PREMIER CYCLE

Première partie: Le nombre et la numération

Les programmes

Les programmes 1985 affirment que l'éducation mathématique contribue à la formation de la pensée dans ses différents aspects:

intuition, imagination, planning, hypothèse et déduction, contrôle pour vérifier ou démentir.

Dans les deux articles précédents nous avons abordé quelques aspects de la géométrie et de la mesure, deux secteurs des programmes qui nous paraissent insuffisamment développés au premier cycle. Si on assigne aux mathématiques un rôle tellement important pour la formation de la pensée tout court, il paraît évident que tous les secteurs devraient être abordés au cours des deux premières années. La tendance générale, au contraire, est plutôt celle de restreindre le champ des activités à l'arithmétique et notamment au calcul et renvoyer au deuxième cycle les autres aspects: résolution de problèmes, géométrie, mesure, logique, probabilité, statistique, informatique. Une bonne connaissance des nombres et du calcul en effet est sans doute un objectif à atteindre, mais justement les programmes parlent d'**éducation mathématique** et non seulement de préparation arithmétique.

En effet, dans la liste des objectifs exposés, tous les différents secteurs ont la même importance, mais la commission chargée de la rédaction des programmes a donné la priorité à la formation de la capacité de ré-

soudre des problèmes en partant de situations concrètes, c'est-à-dire de l'expérience même de l'enfant. Dans la liste des objectifs en arithmétique (deux premières années) on ne parle pas de problèmes, mais il est évident que si "... le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete..." alors on ne peut pas se borner à faire exécuter des calculs et des opérations sans tenir compte du milieu et des problèmes ayant trait à la vie privée et sociale des enfants.

Les notions mathématiques étant strictement enchaînées entre elles, il n'est pas possible de développer séparément les secteurs dont on parle dans les programmes. Mais pour bien avancer sur un front si large il faut "...evitare di procedere in modo episodico e non ordinato e tendere invece alla progressiva organizzazione delle conoscenze..." Pour ce qui concerne l'arithmétique, les objectifs de deux premières années sont très clairement exposés sur sept points dont le dernier en indique le plafond: "... eseguire, almeno entro il cento, addizioni e sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni (con moltiplicatori e divisori di una cifra) anche con l'ausilio di opportune concretizzazioni e rappresentazioni."

Cet énoncé très sec et engageant ne contredit pas la recommandation réitérée de partir toujours d'une situation réelle et cela pour deux raisons au moins:

a) les calculs, les techniques opératoires, les algorithmes ont

eux-mêmes une remarquable valeur formatrice. En effet la maîtrise de ces habilités est une composante très importante de la capacité de formuler des stratégies pour résoudre les problèmes.

b) On ne peut pas se passer de faire des exercices arithmétiques d'entraînement et d'application. A ce propos, la part du maître prend une grande importance car c'est à lui de soutenir les élèves par des motivations acceptables, pour que ces activités ne se transforment pas en routine ennuyeuse.

DEUX QUESTIONS DIDACTIQUES TRES IMPORTANTES

1. Les ensembles: oui ou non?

Après la parution des nouveaux programmes, plusieurs auteurs ont engagé des polémiques sur l'approche ensembliste au nombre naturel et sur (et parfois **contre**) les "mathématiques modernes", à tel point que certains enseignants, aujourd'hui encore, se posent la question: les ensembles oui ou non?

Il s'agit d'une polémique stérile et d'une question à laquelle le bon sens mathématique ne peut répondre que **oui**. Bien sûr, c'est un oui qui doit tenir compte du progrès de la didactique des mathématiques qui est en train de se transformer **enfin** en véritable science au niveau universitaire. Le passage des programmes qui a déclenché la discussion est le suivant:

“...la simbolizzazione formale di operazioni logico insiemistiche non è necessaria, in via preliminare, per l'introduzione degli interi naturali...” C'est une affirmation qui ne concerne que l'approche à l'aspect cardinal du nombre et qui n'exclut que le recours aux termes et aux symboles de la théorie des ensembles, au premier cycle.

La notion de cardinal est très élémentaire et la théorie de Cantor en donne une définition très simple et irremplaçable. Un grand mathématicien, L. Lombardo Radice, (1) sans recourir aux symboles et aux langages compliqués, nous explique qu'il s'agit de “... quell'elementarissimo procedimento di confronto diretto, che ci permette di stabilire se gli oggetti di un insieme finito I sono tanti quanti gli oggetti di un altro insieme finito I' , o no.

Si tratta di un procedimento usato dai popoli primitivi, e dai bambini che non sanno contare, per stabilire se i due insiemi contengono lo stesso numero di oggetti, e cioè dell'«accoppiamento» di un oggetto del primo insieme con un oggetto del secondo. I due insiemi contengono lo stesso numero di oggetti se, alla fine, non avanzano oggetti né del primo né del secondo insieme («ogni bambino una caramella, in modo che ne avanzino caramelle, né qualche bambino resti senza caramelle»).

D'autre part au paragraphe “d) Logica”, l'emploi didactique de la logique ensembliste est recommandé et non seulement pour les mathématiques, mais aussi pour les sciences et les langues et le premier des objectifs à atteindre est celui de classer des objets, des images, des nombres en fonction d'un attribut et, vice versa, d'indiquer un attribut qui justifie le classement établi. Et encore: l'un des deux objectifs en logique au deuxième cycle exige la pratique du langage des ensembles à l'égard des opérations de réunion, intersection et complément d'ensembles, etc.

La connaissance de la théorie des ensembles par le maître est d'ailleurs indispensable, même si paradoxalement il décide de ne pas utiliser avec ses enfants, parce que c'est grâce aux défini-

tions données par cette logique qu'il peut fractionner le long iter d'apprentissage du nombre cardinal en petits items didactiques, bien enchaînés entre eux, ce qui rend possible une forme rationnelle d'évaluation affective (et non affective, ou aléatoire ou, pire, bureaucratique) du niveau de compréhension d'une notion par les enfants.

Par exemple: le chemin logique qui conduit à la notion de nombre cardinal (un des aspects du nombre) touche progressivement les sous-notions suivantes:

- élément ou objet d'un...
- ensemble
- appartenance
- bijection (comparaison des éléments de deux ensembles)
- puissance d'un ensemble
- équipotence
- classe d'ensembles (ensemble d'ensembles)
- classe d'équipotence
- NOMBRE CARDINAL (comme propriété caractéristique d'une classe d'ensembles équipotents)

Si l'enseignant connaît ce chemin il peut établir, en cas de difficultés ou d'insuccès à quel point de la chaîne il y a un anneau faible ou manquant, en observant les gosses en activité: manipulation d'objets et de matériel structuré, dessin, dialogues entre enfants, etc. Le colloque et l'“interview” maître-élève est une technique parmi les plus efficaces à ce propos.

2. Les problèmes

Puisque au «problème des problèmes» on a assigné une place si importante dans le texte des programmes, il mérite sans doute une série de réflexions qui, d'autre part, ne peuvent être développées dans cet article dédié à l'arithmétique. Cependant si l'apprentissage des nombres et des opérations doit être motivé en partant de situations problématiques concrètes, il convient d'en parler, juste pour essayer de limiter certains effets négatifs qui se traduisent souvent en une constatation qui décourage les maîtres: succès de l'enfant en techniques opératoires, insuccès pour ce qui concerne la résolution de problèmes.

Tout instituteur a pu constater aussi que les enfants du 2ème cycle, devant un texte traditionnel d'un problème (dont la structure est: a) texte descriptif d'une situation; b) données; c) question ou questions) dirigent leurs efforts à la recherche des opérations qui les conduisent rapidement à la solution.

Odette BASSIS, prof. de math à l'Ecole Normale de Bonneuil, dans son livre «Mathématique: les enfants prennent le pouvoir» (1984), Ed. Nathan, propose aux enseignants d'enlever le pourquoi et le comment.

On a proposé à des élèves de CE (deuxième et troisième classe) des problèmes absurdes: «Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine?». L'Auteur nous informe que “...sur les 97 élèves concernés, 76 ont donné l'âge du capitaine en utilisant les données numériques 26 et 10.» Une équipe IREM a proposé ce même problème à d'autres classes de CE: “...sur 171 élèves, 127 trouvent sans hésiter «l'âge du capitaine!»”

Un élève de CM1 à qui on a soumis ce texte: «Dans une bergerie il y a 125 moutons et 5 chiens. Quel est l'âge du berger?» propose la division 125/5. On lui demande: pourquoi une division? “...l'enfant répond, introduisant une logique impeccable dans quelque chose qui n'en a pas: 125+5=130, c'est un peu gros; 125-5=120, c'est gros aussi, tandis que 125:5=25, ça va. Autrement dit les enfants décodent fort bien les attentes implicites prioritaires du maître logées dans toute question: faire des opérations.”

L'hypothèse que les questions des problèmes “...ont pour objectif d'aboutir OBLIGATOIREMENT à des opérations...” est confirmée aussi par une longue enquête menée par une équipe I.N.R.P. (Institut National de Recherches Pédagogiques) qui “...montre que les problèmes numériques classiques sont les plus fréquemment donnés par les maîtres à l'école élémentaire, et que ce qui est d'abord visé par eux, c'est de «donner une bonne maîtrise du calcul numérique». On confond savoir élaborer une stratégie opératoire et savoir fai-

re des opérations. A la limite, pour un problème la calculatrice devrait être de rigueur, renvoyant à d'autres activités la maîtrise des techniques opératoires."

L'auteur invite les lecteurs à réfléchir sur deux sortes de problèmes éducatifs:

- un problème **idéologique**. Chez les élèves le souci de **répondre** prédomine sur celui de **comprendre**, car le rapport maître/élève reste malgré tout autoritaire (...cette subordination est d'autant plus forte, inconditionnelle, qu'elle se cache derrière la forme anonyme et rituelle des questions..."); un problème **pédagogique**: "...si les enfants ont dévié à ce point le sens des opérations, c'est que ce sens-là leur était étranger..." et "...que ces opérations ont été introduites plus comme techniques à bien manier que comme outils opératoires dans des situations leur donnant sens."

Donc, la «question des questions» dans le «problème des problèmes» n'est pas si banale qu'elle paraît à première vue. Mais attention! Il s'agit là de bien initier les enfants à distinguer les techniques opératoires des stratégies pour résoudre les problèmes. Bien sûr les problèmes avec des questions ont

plein droit d'accès à l'école élémentaire, il ne faut pas les bannir! Enfin de compte: il y a mille façons différentes de poser une question...

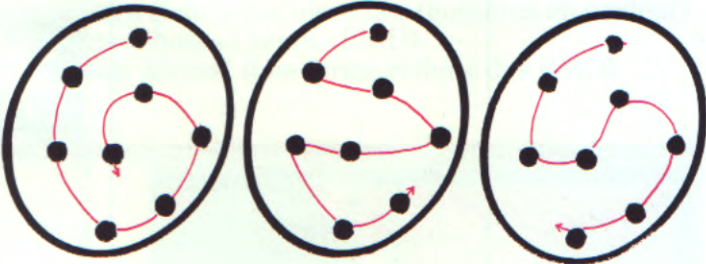
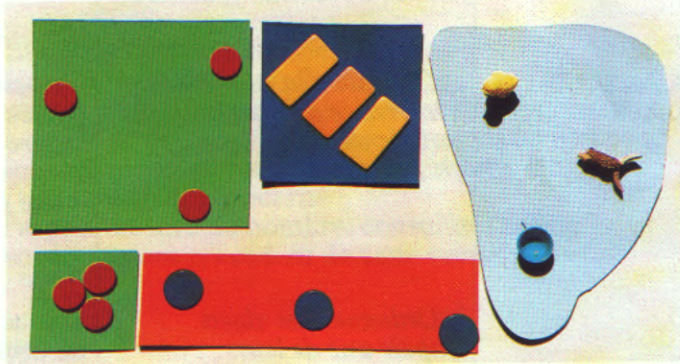
LE NOMBRE ET SES FACETTES- LA NUMERATION - CAPACITÉS DES ÉLÈVES, ACTIVITÉS ET MATÉRIEL DIDACTIQUE.

Les nombres expriment un certain ensemble de caractéristiques des objets, des personnes, des phénomènes: la quantité, l'ordre, la mesure, les relations, les égalités et les différences, les augmentations et les diminutions, les rythmes et les progressions, etc. L'enfant aujourd'hui est précocement mis en contact avec plusieurs de ces faces du nombre: à cinq ans il connaît non seulement la comptine des nombres, mais aussi, leur valeur cardinale jusqu'à 5 ou 6, leur ordre, leur emploi comme mesure ou comme simple indicateur (plaques des voitures, téléphone, numéros des maisons, etc.). La tâche de l'école est celle de compléter rationnellement la construction du nombre et de la numération en lui en faisant connaître de façon concrète tous les aspects et les utilisations. Si le tableau est complet il n'aura pas

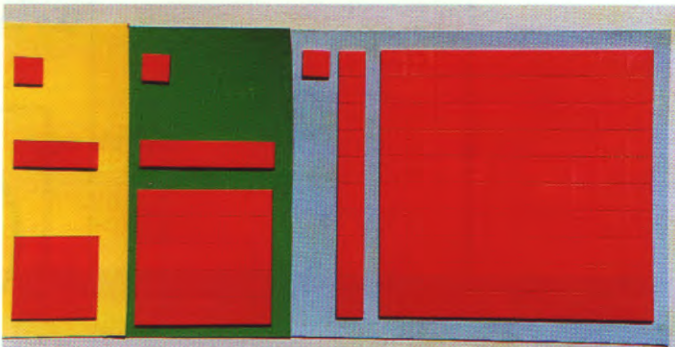
des grandes difficultés à atteindre le stade de l'abstraction. L'approche uniquement cardinale est insuffisante: si par exemple on utilise les ensembles on s'arrête à la correspondance biunivoque (bijection) et à l'équipotence, on aura pris en considération le seul côté quantitatif du nombre. L'enfant a donc le droit de s'approcher du nombre aussi par les chemins des ordres, de la mesure, de l'itération (les rythmes de tout genre: sauts d'une balle, pas et marches, formes, couleurs, poésie et musique...), de la récursivité (les progressions + 1 et - 1 dans la numération, la succession en boîte des groupements pour construire le grand château de dizaines, centaines, etc.)

Dans le tableau qui suit on trouvera, de gauche à droite dans la première colonne, les différents aspects ou faces du nombre et de la numération; dans la deuxième les principales capacités à atteindre par les élèves, en ayant comme modèle pédagogique un enfant "producteur" et non simplement "récepteur" de notions; dans la troisième colonne: une liste minimale d'activités et de matériel didactique.

ASPECTS DU NOMBRE OU DE LA NUMERATION	Capacités à atteindre par les élèves	Activités et matériel didactique
1 ASPECT ITÉRATIF	<p>(a) <i>Suivre correctement des rythmes et les reproduire dans des situations différentes.</i></p> <p>(b) <i>Compter des objets, des actions, etc., en mettant correctement en correspondance: le nom du nombre, l'objet ou l'action à compter, le geste de la main et le mouvement de l'œil qui désignent l'objet.</i></p>	<p>Écoute des disques et cassettes fortement rythmée. Production de musique et de rythmes: chant; petits instruments à percussion (tambour, boîtes sonores, triangle...) marche rythmique; danse; jeux rythmiques; autres rythmes: formes (fiches, gommettes, décoration des cahiers, des tartes,...); graphiques (lignes, couleurs-crayons, pinceaux-graffiti, céramiques,...).</p> <p>Au début le comptage n'exige que la connaissance de la comptine des nombres un, deux, trois,...) Il existe des jeux et des chansons populaires amusantes pour dénombrer (objets, gestes, actions)</p>

ASPECTS DU NOMBRE OU DE LA NUMERATION	Capacités à atteindre par les élèves	Activités et matériel didactique
2. ASPECT CARDINAL	<p>c) Compter des objets, des images, etc., en produisant des parcours stratégiques de comptage.</p> <p>a) Comparer des mêmes quantités d'objets disposés de façon différente.</p> <p>b) Comparer les objets où éléments des ensembles pour en établir la puissance</p> <p>c) Emploi des symboles $<$, $>$, $=$, pour comparer les ensembles.</p> <p>d) Construire des classes d'ensembles équipotents</p> <p>e) Former des "boîtes des nombres" et donner à chacune un symbole, un nom, une identification graphique</p>	<p>Activités et matériel didactique</p>  <p>Apprendre à tracer les chemins de comptage (fiches à préparer) et à les comparer.</p> <p>Les exercices classiques de Piaget pour le contrôle de la conservation de la quantité en faisant abstraction de tout autre aspect: espace, matériel, situation, couleur, etc.</p>  <p>Manipulation d'ensembles jusqu'à six éléments. Les comparer terme à terme (bijections). Matériel: collections de petits objets quelconques; ficelles; baguettes pour flécher les correspondances</p> <p>- cartons (5 cm x 5 cm) pour les symboles $<$, $>$, $=$.</p> <p>Petites boîtes, ou sachets transparents à fermer avec ficelle, pour manipuler les ensembles et en compter les éléments sans les défaire.</p> <p>Grande boîte pour réunir les ensembles équipotents. On peut aussi agraffer entre elles les petites boîtes d'ensembles équipotents.</p> <p>(voir photo page suivante)</p>

ASPECTS DU NOMBRE OU DE LA NUMERATION	Capacités à atteindre par les élèves	Activités et matériel didactique
3. ASPECT ORDINAL	<p><i>f) Reproduction sur grandes feuilles de ces manipulations.</i></p> <p><i>a) Connaître la comptine des nombres (c.à.d: la séquence verbale un, deux, trois,..)</i></p> <p><i>b) Ordonner des objets d'après une de leurs caractéristiques longueur, épaisseur, etc., en utilisant l'ordre large \leq et \geq et l'ordre strict $<$ et $>$.</i></p> <p><i>c) Mettre en ordre strict les boîtes des nombres.</i></p> <p><i>d) Construire la ligne des nombres.</i></p>	 <p>Travail collectif - grandes feuilles, feutres.</p> <p>Compter des collections d'objets: crayons, feuilles, pièces de monnaie, livres, personnes, etc. Suivre quotidiennement le calendrier: le jour, la semaine, le mois. Déplacer à la main les aiguilles d'une grande horloge didactique.</p> <p>Voir activités et matériel sur le numéro précédent de cette revue.</p> <p>Extraire un ensemble de chaque boîte (classe) et les mettre ordre strict sur des lignes tracées au sol. Placer aussi des cartons des symboles à côté de chaque représentant.</p> <p>Reproduire sur bande affichée aux parois de la classe, la ligne des nombres, sans y suspendre les sachets ou les boîtes des représentants.</p> 

ASPECTS DU NOMBRE OU DE LA NUMÉRATION	Capacités à atteindre par les élèves	Activités et matériel didactique
4. LE NOMBRE COMME MESURE	<p>a) <i>Savoir utiliser les matériels structurés pour associer une mesure à chaque nombre.</i></p> <p>b) <i>Exprimer par un nombre la mesure d'un objet.</i></p> <p>c) <i>Mesurer avec des unités légales.</i></p>	<p>-Réglettes Gattegno-Cuisenaire (nombres en couleur) -Bloc multibases Diènes (BMD) -"Cambio Meina" (une forme réduite des BMD)</p>  <p>Mesurer des objets avec des unités arbitraires: longueurs, aires, volumes poids, temps,...</p> <p>Emploi du mètre simplifié, des réglettes (nombres en couleur), du litre (bouteille, cube, ancien litre des laitiers), de la balance Roberval avec le poids en métal, des cylindres gradués ou non pour les liquides et les poudres (farine, sable), etc. Pour tout ce qui concerne l'aspect mesure du nombre: consulter l'article sur le numéro précédent de cette revue.</p>
5. LE NOMBRE ET LA NÉCESSITÉ: LA NUMÉRATION.	<p>a) <i>Utiliser récursivement les opérateurs</i> $-(+1)\rightarrow$ $-(-1)\rightarrow$ <i>pour construire la numération comme succession progressive et régressive des nombres naturels.</i></p> <p>b) <i>Comprendre les notions d'ensemble vide et de son cardinal.</i></p> <p>c) <i>Utiliser des autres opérateurs pour "se promener" sur la ligne des nombres et découvrir de nouvelles numérations.</i></p>	<p>Ranger les ensembles représentant des classes (d'abord les sachets transparents, ensuite leurs représentations sur petits cartons) en utilisant récursivement les opérateurs $-(+1)\rightarrow$ et $-(-1)\rightarrow$ pour fonder rationnellement l'ensemble des naturels: chaque nombre a un nombre qui le précède et un nombre qui le suit, sauf le <u>zéro</u> qui n'a pas d'antécédent</p> <p>Attention au nombre <u>zéro</u> comme tête de série et comme cardinal nul d'un ensemble vide.</p> <p>Les opérateurs et leurs éléments: un nombre, un signe d'opération, une flèche qui en indique la direction: $-(+2)\rightarrow$ ou $(+2)\rightarrow$</p> <p>Les numérations comme progressions arithmétiques et comme initiation au calcul.</p>

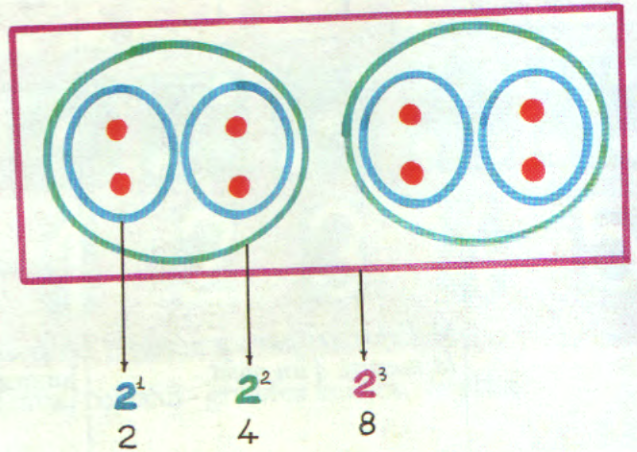
ASPECTS DU
NOMBRE OU DE LA
NUMERATION

Capacités à
atteindre par
les élèves

Activités et
matériel didactique

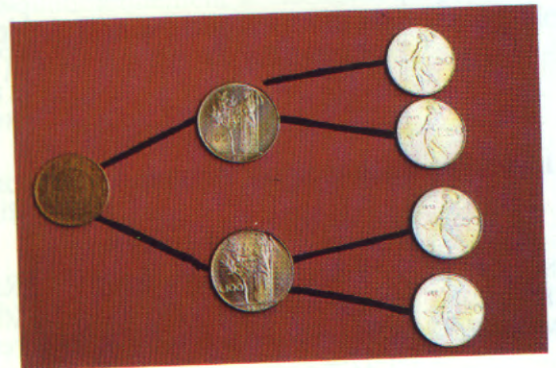
d) *Grouper les éléments d'un ensemble selon une BASE donnée (par deux, par trois, par quatre) pour les compter*

L'emploi de bases basses (deux, trois, quatre) permet de construire plus rapidement des groupements d'ordre élevé sans aller au-delà des possibilités de plus aisément et rapidement.
compréhension des enfants de 6/8 ans.
(En base 2: $2^3 = 8$; en base 10: $10^3 = 1000$).



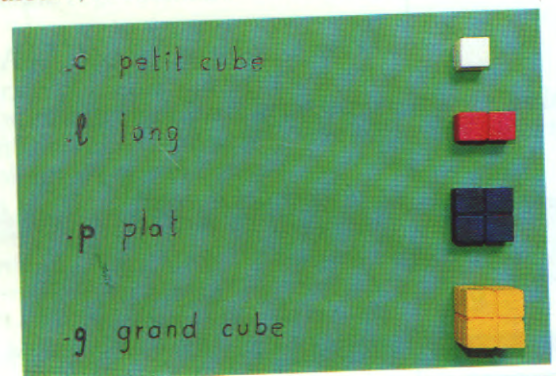
e) *Savoir jouer au CHANGE: faire et défaire des groupements en base 2, 5, 10*

La notion de CHANGE est la même qu'on utilise pour les monnaies:



Les jeux avec les monnaies sont très importants pour bien fonder cette notion, d'autant plus que les enfants utilisent réellement cet instrument dans la vie quotidienne.
Jeux et exercices de change avec les nombres en couleurs, les BMD, le "cambio Meina"

f) *Utiliser des noms et des symboles différents pour désigner les groupements*



ASPECTS DU
NOMBRE OU DE LA
NUMERATION

Capacités à
atteindre par
les élèves

Activités et
matériel didactique

g) *Connaître et utiliser les nombres jusqu'à 100. Savoir les écrire et les représenter à l'aide de "... opportune concretizzazioni e rappresentazioni". (NN.PP.1985).*

Pour les représentations concrètes des nombres utiliser des abaques de type différent:

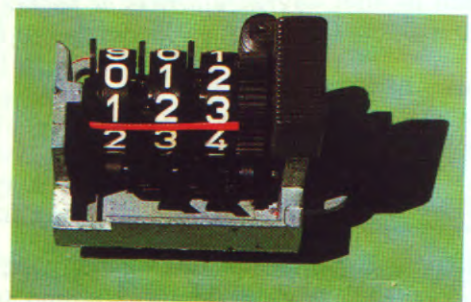
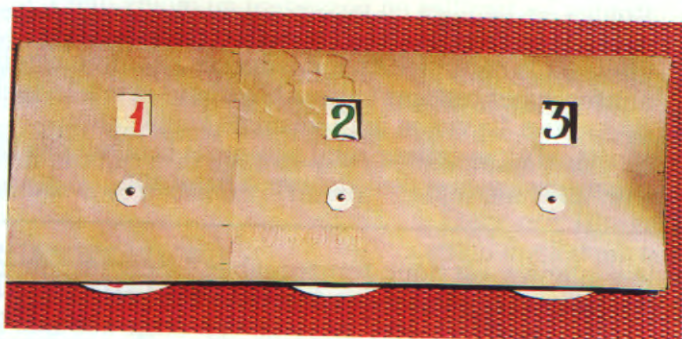
-type à planches horizontales
de couleurs différentes

- type vertical



Les compteurs à fenêtres et disques tournants,
fabriqués en classe avec les enfants:

Les compteurs de bande, avec bouton de remise
à zéro. On les trouve chez les techniciens
qui réparent les magnétophones à cassettes.



h) *Connaître la numération de 0 à 100 et en comprendre les mécanismes. Ecrire correctement les nombres de 0 à 100.*

Extension de la ligne des nombres.
La dizaine, la centaine
Le nombre comme grandeur discrète:
entre deux nombres naturels consécutifs il n'y en
pas un autre: entre 2 et 3 il n'y a pas un autre nombre
(les fractions appartiennent à un autre ensemble
de nombres).

ASPECTS DU NOMBRE OU DE LA NUMERATION	Capacités à atteindre par les élèves	Activités et matériel didactique
	<p>i) Reconnaître les aspects récurrents dans les numérations en base 10 (et aussi en base 2 et 5 si on dispose du temps et des moyens nécessaires).</p> <p>0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 43, → 50, 51, → ↓</p> <p>opérateur $\rightarrow (+1) \rightarrow$</p> <p>0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, → 30, 32, → 40, ↓</p> <p>opérateur $\rightarrow (+2) \rightarrow$</p> <p>0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, → 90, → ↓</p> <p>opérateur $\rightarrow (+3) \rightarrow$</p> <p>l) Savoir utiliser les calculettes (calculatrices de poche) pour observer plus aisément les effets de la récursivité dans les numérations. $\pm 1; \pm 2; \pm 3$, etc.</p>	<p>Numération des naturels en base 10. Récursivité des chiffres des unités dans chaque dizaine. Progression des chiffres indiquant les dizaines, etc.</p> <p>L'emploi des calculettes (toutes les familles en possèdent au moins une!) aide à la recherche des éléments récurrents et des effets de la récursivité car désormais l'homme confie aux machines certains travaux physiques et intellectuels de routine. La vision immédiate de l'application répétée d'un opérateur rend plus facile la mémorisation des mécanismes et des effets de la récursion.</p>

L'évolution des techniques didactiques, il faut le souligner, est donc remarquable. La complexité des notions de nombre et de numération exclut la possibilité d'appliquer des procédés d'apprentissage-enseignement qui s'inspirent à un seul ou à une partie des différentes faces de ces deux notions. Les méthodes "classiques" qui visent directement au calcul, glissent sur plusieurs des aspects exposés dans cet article, et d'autre part une approche exclusivement ensembliste au nombre risque d'en développer seulement la côté qualitatif ou cardinal.

Le "métier" des maîtres, surtout dans le domaine mathématique est en train de changer pour passer du stade artisanal et individuel au stade du travail en équipe car la rédaction d'un programme d'enseignement et des plans de travail pour le réaliser est une activité qui s'approche de plus en plus de celle des ingénieurs modernes: dans le futur proche on parlera probablement d'«engineering didactique».

Sergio BOSONETTO

Notes. 1) Lucio Lombardo Radice, ISTITUZIONI DI ALGEBRA ASTRATTA, Feltrinelli. texte pour les étudiants du premier cours de licence en math.

NDLR: L'auteur, soucieux de l'utilité des suggestions de travail proposées dans ses articles, sollicite l'avis circonstancié des lecteurs. Il offre sa disponibilité pour répondre à toute demande d'éclaircissements ou de développement des sujets déjà abordés.