Sergio BOSONETTO

GÉOMETRIE AU PREMIER CYCLE

Depuis que les "**nouveaux**" programmes ont paru, il y a cinq ans ils n'ont pas eu encore leur pleine application: certains secteurs restent dans l'ombre, d'autres, et la géométrie au premier cycle en est un, ne sont suivis que partiellement.

Les causes de ce retard sont nombreuses. Il nous suffit d'en énoncer quelques-unes parmi les plus évidentes:

- la préparation des instituteurs reste générale et ce n'est pas de leur faute car le plan ministériel pour l'accès des enseignants primaires à l'université vient d'être formulé ces jours-ci; tandis que les maîtres espagnols et français ont une préparation universitaire;

- les méthodes d'enseignement restent malgré tout de type adulte, étant fondées sur la déduction et sur la transmission verbale des notions, faute aussi d'une dotation suffisante de matériel didactique apte à l'apprentissage de la géométrie;

- les recherches au niveau universitaire, très rares d'ailleurs dans ce domaine, ne sont pas diffusées et donc très peu connues.

Ces quelques raisons suffisent pour nous convaincre que:

- le retard de la mise en application des programmes en géométrie est un phénomène structural, dû aux institutions et non pas aux opérateurs;

- les progrès seront forcément lents et, encore une fois, obtenus aux dépens des instituteurs, qui heureusement peuvent aujourd'hui travailler par petites équipes et se spécialiser en quelque sorte;

- pour la réussite de l'apprentissage-enseignement de la géometrie il faut mettre sur pied une solide programmation dans laquelle le matériel didactique puisse trouver una place importante, car la formation de chaque notion et des structures conceptuelles chez l'enfant ne se réalise pas sans instruments en ce domaine.

Dans l'espoir de donner une contribution, même modeste, à l'enrichissement des méthodes, ce travail a été articulé en trois secteurs:

1. Organisation de l'espace
2. Connaissance des figures planes et solides
3. Transformations topologiques

Chacun de ces secteurs a été subdivisé en deux parties:

a) Prescriptions contenues dans les programmes officiels accompagnées des intégrations estimées nécessaires.

b) Description sommaire de quelques itinéraires didactiques et notamment du matériel et des instruments indispensables pour obtenir des résultats évaluables avec une certaine objectivité.

Pour ce qui concerne les prescriptions officielles on a préféré les décrire sous la forme de "**capacités des élèves**", ce qui permet d'un côté d'éviter les malentendus qu'une exposition par "**objectifs**" risque de provoquer et de l'autre côté d'encourager les opérateurs à s'orienter vers un type d'évaluation qui prenne en considération non seulement la capacité de "**barrer les cases**" d'un questionnaire, mais aussi le comportement même de l'enfant dans les activités de nature "**géométrique**".

Ces mêmes indications prescriptives ont été intégrées aussi bien par d'autres qui s'ensuivent, que par des "**capacités**" non prévues dans les programmes, mais recommandées par les mathématiciens universitaires qui s'occupent de l'enseignement primaire, pour compléter et pour rendre plus organique l'action didactique.

1. ORGANISATION DE L'ESPACE

Capacités

Savoir repérer des objets dans l'espace:

- en ayant soi-même comme point de repère
- en ayant d'autres points de repère fixes ou mobiles
- en utilisant correctement, en situation réelle, les expressions les plus convenables pour "**localiser**": sur/sous, au-dessus/au-dessous, par dessus, dedans/dehors, à l'intérieur/à l'extérieur, à droite/à gauche, à côté, entre, devant/derrière.

Savoir construire des maquettes (très simples au début) d'une pièce de maison (cuisine, chambre, etc.), d'un village ou d'un petit quartier, afin:

- d'établir et de décrire la position des éléments fixes
- de varier la position des élé-

ments mobiles et de décrire leurs parcours

- de prendre conscience de la RELATIVITÉ des points de repère.

Savoir reconstruire librement les plans des maquettes sur papier blanc et ensuite sur quadrillages à large maille, en utilisant des critères de mesure très approximatifs.

Savoir repérer les éléments placés ou dessinés sur un quadrillage en utilisant un code (couleurs, flèches, lettres, chiffres, symboles).

Savoir décrire en langage codé un parcours dessiné sur quadrillage:

Activités et matériels didactiques:

Bien qu'attrayants et parfois bien conçus, les exercices que le marché nous offre sous forme de cahiers des élèves ou de fiches, ne sont pas suffisants pour conduire les enfants à la conquête des concepts abstraits de la géometrie. A une telle conquête on ne parvient que par un ensemble d'activités les plus variées, qui démarrent toujours par la manipulation d'objets concrets du milieu environnant et du matériel préparé **"ad hoc"**.

L'apprentissage de la géométrie au premier cycle suit un parcours qui revient toujours au concret.

Les notions se forment et se développent selon un chemin ascendant, mais qui revient régulièrement sur ses pas pour s'élever en forme de structures de plus en plus abstraites, qui s'enchaînent par des rapports logiques que chaque enfant "découvre" et utilise suivant des modalités très personnelles qui s'appuient fortement sur le matériel et sur les supports didactiques. Et c'est justement sur ces moyens concrets que les indications qui suivent veulent attirer l'attention des opérateurs.

Les grands espaces tels que la COUR, la SALLE DE GYMNASTIQUE, les COULOIRS, la SALLE DE CLASSE sont les instruments concrets qui conviennent le mieux pour initier les enfants aux activités d'organisation spatiale.

Le VILLAGE ou le QUARTIER, bâtis en différentes versions et mesures:

MACRO-VILLAGE. Grande maquette réalisée en carton ou en matériel plastique (grandes boîtes, emballages en plastique). Placé dans un espace suffisamment ample, il peut être rangé autour de rues que les élèves puissent effectivement parcourir.

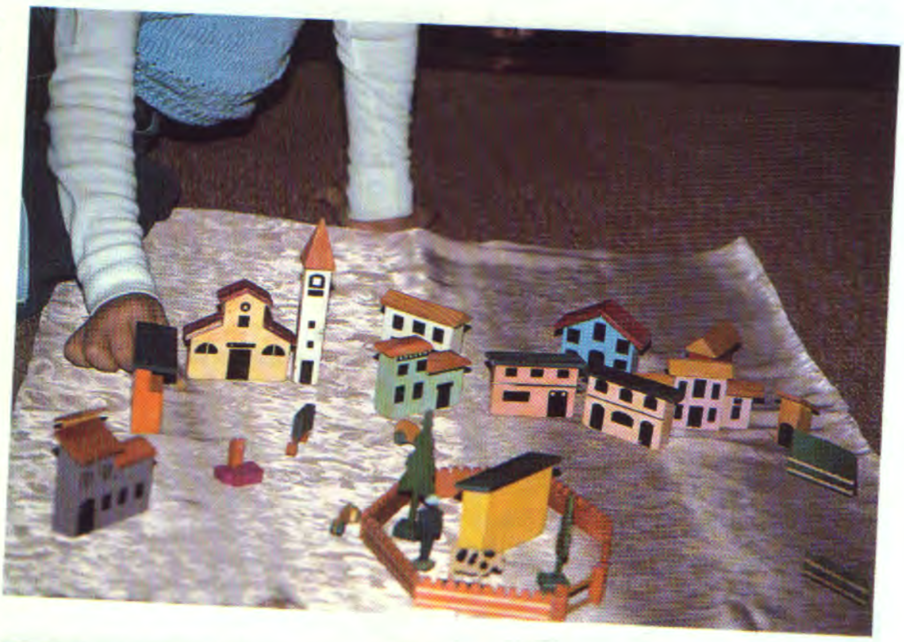
MINI-VILLAGE. Maquette réalisée avec des boîtes pour aliments ou pour médicaments, sur une surface d'un mètre carré, au moins, équipée de piétons, voitures, ameublement urbain (panneaux, enseignes, cabines du téléphone, etc.). On peut utiliser aussi les éléments des villages-jouets qu'on trouve dans toutes les familles.

Tout d'abord les enfants rangent librement les pièces sur une surface plane. Ensuite ils en changeront la disposition sur stimulation du maître: autour d'une place carrée, ou ronde, etc., ou le long d'une rue principale, ou autour d'un carrefour,...

Ensuite ils pourront disposer les éléments selon des schémas plus réguliers, par ex. un réseau orthogonal de rues.

Les notions de parallélisme et de perpendicularité seront apprises en cherchant des procédés pratiques pour bien aligner les maisons, les voitures dans un parking, etc.

Plusieurs jeux peuvent être dirigés vers la pratique de l'orientation et du repérage: dans le macro-village on donne un nom aux rues et une destination aux édifices (école, hôtel, etc;); les



enfants apprennent à indiquer leur position ou celle d'une maison dans le village; il décrivent le parcours pour aller d'un point à l'autre du macro-village.

Les mêmes exercices/jeux peuvent être repris sur le mini-village.

Il s'agit alors d'une représentation plus abstraite de la réalité: on ne peut pas se promener dedans, mais il faut se mettre "à la place de ...". Ensuite, déjà en classe de première, les élèves peuvent reconstruire le village (ou une partie seulement) en rangeant les pièces sur un tissu à quadrillages ou sur un grand échiquier pour repérer les objets en se servant du quadrillage. Ensuite encore les "couloirs" horizontaux et verticaux auront leurs symboles: une couleur, un dessin, un nom, une lettre, un chiffre. Une fois apprise la notion de repérage sur quadrillage on l'utilisera de façon toujours plus abstraite en d'autres disciplines (arithmétique, logique, statistique, etc.).

TABLEAU À DEUX ENTRÉES.

Réalisé en carton épais ou en bois, ce tableau permet de visualiser les relations qu'on peut établir entre les éléments de deux ensembles. En géométrie on peut s'en servir pour classer les formes, mais aussi pour décrire en langage mathématique les relations spatiales: si on assigne aux rangs horizontaux et verticaux des lettres et des chiffres, chaque case du tableau peut être repérée par des couples ordonnés de symboles (3,d;5,a). Une succession de couples décrira un parcours avec une précision absolue.

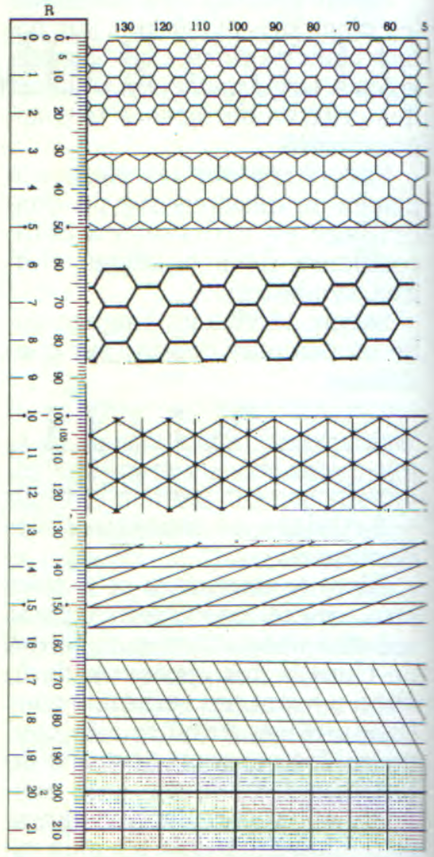
Par des flèches dessinées sur des petites cartes à placer dans les cases, on peut indiquer une succession de déplacements sur le tableau.

PAPIER STRUCTURÉ.

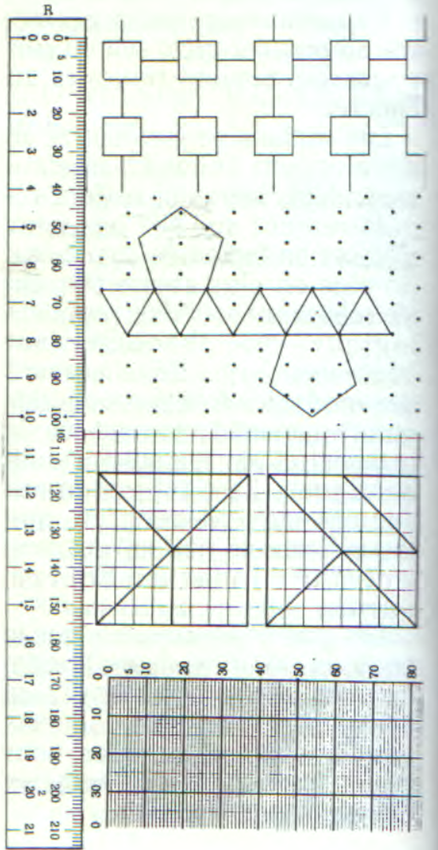
Francesco Speranza, professeur universitaire de géométrie, très connu en Italie pour son attention aux problèmes didactiques, affirme que l'une des plus grandes invention pour le progrès des mathématiques à été le papier quadrillé. Chez les papetiers on trouve aujourd'hui des transparents avec différentes structures linéaires (carrés, triangles, hexagones, etc.). On peut en tirer des photocopies à utiliser pour les activités des enfants:

- dessiner et colorier des "**rythmes**" et des frises
- composer des "**tableaux**" géométriques (fleurs, personnages, animaux, etc;)
- s'exercer à copier des images, à les agrandir ou rapetisser, à les déformer
- établir des symétries selon un axe vertical ou horizontal ou en diagonale
- faire des exercices de pavage ou carrelage avec des étiquettes à coller (mosaïque)
- initier les enfants aux problèmes de mesure en mettant en rapport les carreaux d'une surface avec son contour.

Il est très difficile pour un enfant de tracer une symétrie sur papier blanc car il s'agit d'une opération très complexe d'orientation et d'organisation spatiale.



Echantillons de papier structuré

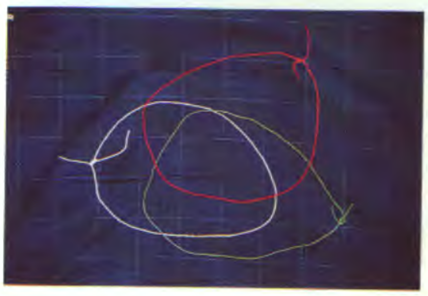


DIAGRAMMES (de Venn)

Réalisés avec des ficelles colorées ou avec des plaques en plastique transparent entourées d'un bord de sparadrap coloré. On les utilise pour classer les figures planes et solides selon des critères très simples: solides au bords ronds (cylindre, cône, sphère?...), figures ayant le même nombre de côtés, etc.

TABLEAU DE FEUTRE.

Les enfants jouent et travaillent très volontiers avec ce matériel facilement et rapidement maniable. Cet instrument, né pour soutenir la belle "leçon du maître" doit être manié surtout par les enfants: ils découpent les images dessinées par le maître ou par eux-mêmes sur papier floqué (c'est un excellent travail d'exploration de formes) et ils composent des mosaïques, des plans (de la salle de classe, du village, etc.) Des parcours peuvent être tracés à l'aide de ficelles floquées et colorées.



Quel que soit l'iter didactique qu'on suive, il faut souligner l'importance de deux étapes fondamentales:

- 1. la formation de la notion de **relativité** dans les activités pratiques de repérage. Voilà quelques passages: de la description banale d'un milieu à la localisation ponctuelle d'un élément en fixant un point de repère et ensuite en se référant aussi à des points mobiles ("je suis immobile sur un moyen qui marche, mais en même temps je me déplace avec lui...");
- 2. la formation de la capacité de **représenter le milieu** et d'en repérer les éléments par des moyens mathématiques: de la représentation par le dessin spontané à l'emploi de quadrillages de coordonnées et d'autres codes pour décrire des situations statiques et dynamiques (déplacements, parcours).

2. CONNAISSANCE DES FORMES

Capacités

Savoir reconnaître les solides de base et en connaître les noms.

Savoir comparer les objets de la réalité avec ces solides et avec leurs parties et compositions.

Savoir décrire les parties planes ou courbes de chaque solide, en identifier les bords rectilignes et curvilignes (arêtes) et les sommets. Connaître le nombre des faces, arêtes, sommets de chaque solide.

Savoir reconnaître la forme des parties planes des solides et en connaître les noms (triangle, rectangle, carré, cercle,...).

Savoir identifier les figures planes dans les objets du milieu.

Savoir établir par des opérations de pré-mesure très approximatives la "**régularité**" de certaines figures planes.

C'est par ces activités pratiques que l'enfant s'approche des notions fondamentales de ligne droite, lignes parallèles, lignes incidentes et perpendiculaires, point comme lieu d'incidence de lignes, ligne comme incidence de deux plans.

Activités et matériel didactique

COLLECTION COMPLETE DE SOLIDES de base. L'expérience suggère de faire manipuler les solides fondamentaux: cylindre, cône, cube, parallélépipède, pyramide, prisme, sphère, tétraèdre. Il serait très utile de les avoir en plusieurs versions: variétés de couleur, grandeur, matériel.

Une bonne collection invite les

enfants au jeu et suggère aux opérateurs des activcités intéressantes: à partir des jeux spontanés de construction on arrive à des observations toujours plus poussées sur les particularités de chaque forme (par ex.: reconnaître les solides cachés dans un sac à la seule exploration tactile).

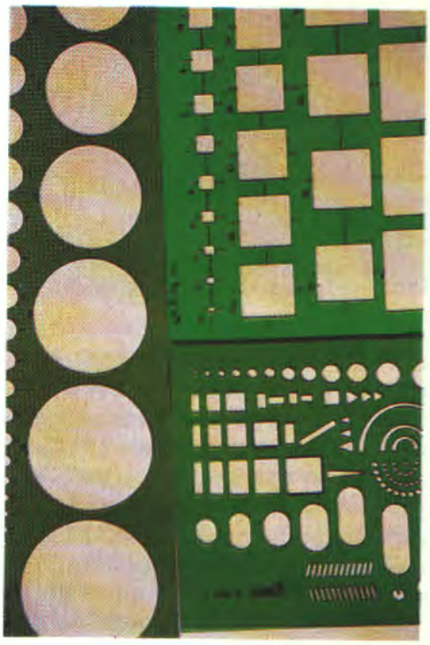
Pour le passage des forme solides aux figures planes on peut utiliser de la PATE A MODELER en feuilles minces pour y marquer par pression les empreintes des faces des solides.

On peut aussi revêtir les solides avec du papier autocollant, le découper suivant les bords des objets, le détacher et le recoller sur carton.

Les enfants, même si bien entraînés, emploient beaucoup de temps pour réussir à concevoir les figures planes comme des abstractions euclidiennes, c'est-à-dire des formes à deux dimensions. Un chemin possible: faire manipuler du matériel de plus en plus mince BLOCS LOGIQUES DIENES

formes en carton, étiquettes

et finalement le DESSIN au crayon en utilisant les PATRONS A JOURS que les dessinateurs emploient pour tracer sans problème les polygones et les cercles. Seulement à partir de la troisième on abordera le problème du dessin à la règle et au compas.



Si à la fin du cycle un enfant affirme qu'un carré en carton n'est pas une figure plane car il est épais (troisième dimension) on peut dire qu'il est bien initié aux "**mystères**" du plan euclidien.

Le GÉOPLAN à base carré ou triangulaire permet aussi de construire aisément des polygones. Le modèle à trous est préférable car les tablettes à clous fixes empêchent les mouvements des doigts. Les BARRETTES PERFORÉES en bois, en fer ou en plastique unies par des petits pivots donnent un modèle démontable des polygones.

Il est important, même s'il s'agit d'aspects non géométriques, de mettre en évidence certaines propriétés physiques des solides et des structures polygonales: stabilité du cube et instabilité de la sphère: rigidité des structures triangulaires et mobilité de celles à quatre côtés (propriété fondamentale appliquée à la construction de tout bâtiment).

3. TRANSFORMATIONS TOPOLOGIQUES

Les programmes ne parlent pas expressément de notions topologiques. Les activités d'orientation (dedans/dehors, etc.) et la description de parcours ne sont qu'un aspect initial très limité de cette géométrie que les mathématiciens et les psychologues considèrent très très proche de l'esprit de l'enfant de 6 à 8 ans. En effet dans plusieurs pays du monde on a introduit des notions topologiques dès le premier cycle.

Dans les trasformations topologiques (semblabes aux déformations de lignes et de surfaces tracées sur une feuille élastique qu'on étire) le principe d'égalité n'existe pas comme identité absoulue tel qu'on le trouve dans la géométrie d'Euclide (deux triangles son égaux s'ils sont identiques). En topologie on parle de figures équivalentes si elles conservent certains invariants:

- une ligne ouverte est équivalente à n'importe quelle autre ligne ouverte. Il n'existe pas de relation d'équivalence entre une ligne ouverte et une ligne fermée;
- on peut transformer une ligne en une autre (en l'étirant, par ex.) si dans la ligne transformée on a respecté l'ordre de ses point. [1]

Dans l'apprentissage de la lecture-écriture plusieurs difficultés tirent leur origine de la logique "**topologique**" spontanée de l'enfant qui considère équivalents des signes tels que

$$f \equiv t; \quad a \equiv d \equiv b \equiv q \equiv p$$

et en effet ces images sont parfaitement équivalentes en topologie. Et encore c'est par des relations topologiques que nous reconnaissons les équivalences que voici:

$$A \equiv A \equiv A \equiv A$$

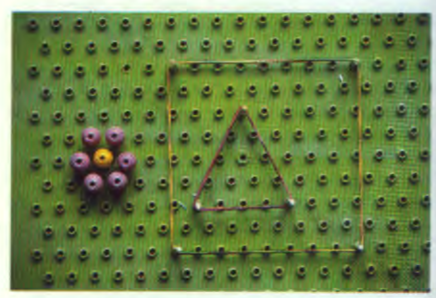
Dans ce domaine les enfants peuvent atteindre de remarquables **capacités**:

Savoir reconnaître les invariants topologiques sur une image transformée par des opérations concrétes: gonflage, dégonflage, étirement (les déchirages ne sont pas admis), application d'une surface plane sur une autre dénivelée (par ex. transformer un village de la plaine en village de colline en essayant de maintenir la structure générale).

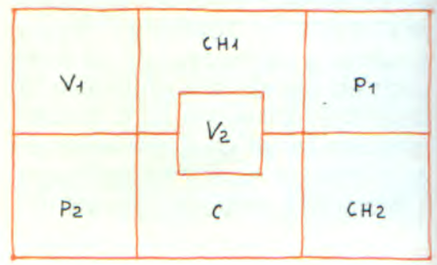
Savoir tracer des lignes ouvertes ou fermées; reconnaître dans un réseau des noeuds (points d'incidence de lignes) des régions délimitées par des frontières (les lignes mêmes dites aussi "**arcs**" ou "**courbes**" en topologie).

Savoir résoudre par des opérations pratiques des problèmes élémentaires, à savoir:

- retrouver le bon parcours dans un labyrinthe (c'est une question d'ouvert ou fermé)
- tracer un parcours sans passer deux fois sur la même frontière (tandis qu'on peut passer plusieurs fois sur un noeud):



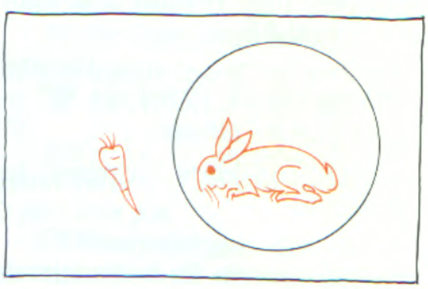
- colorier des réseaux (ou "**mappes**") en évitant la coïncidence de la même couleur sur une même frontière. Variante de ce jeu: disposer un ensemble de deux vaches, deux chiens, deux poules, un coq dans un réseau, un seul animal dans chaque région, mais attention: les animaux de la même espèce ne peuvent pas être mis dans des régions confinantes.



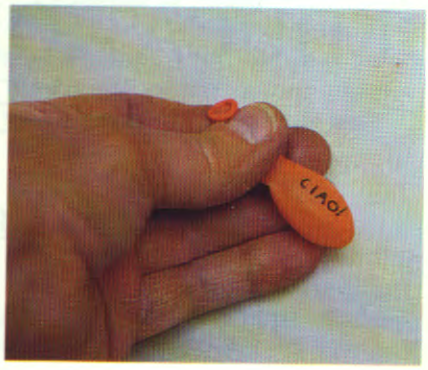
Activités et matériel didactique

Les FEUILLE ELASTIQUES en caoutchouc ou en tissu élastique.

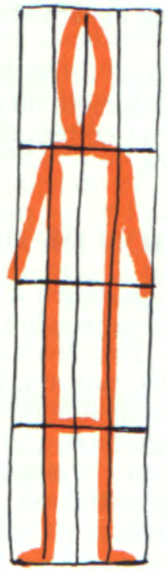
Après avoir dessiné des images sur une feuille, on la déforme par étirage. On demande aux élèves si on peut ouvrir les lignes fermées, mettre le nez sous la bouche, etc. Ou faire sortir le lapin de sa région pour ronger la carotte.

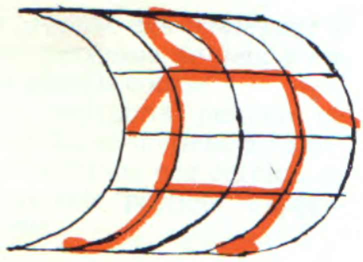


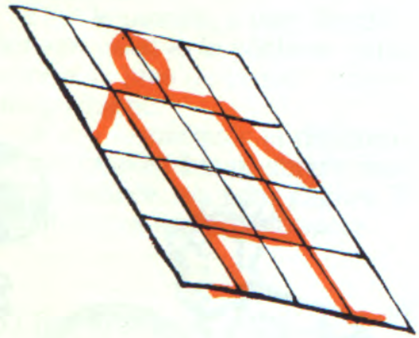
Les BALLONS A GONFLER. Dessiner des images sur les ballons dégonflés. Observer et décrire les changements après gonflage.



QUADRILLAGES pour la transformation graphique des images.







Les LABYRINTHES. Les modèles trop simples sont inutiles. Il faut que la recherche du parcours soit une opération rationnelle: avant de le tracer au crayon, l'oeil doit explorer et découvrir une partie du "couloir" libre. Au fur et à mesure que l'enfant s'entraîne, il augmentera sa capacité d'exploration préalable.

Pourquoi initier les élèves à des géométries si différentes ?

Les activités de l'enfant, ses jeux, ses pensées, sont des forces qui lui permettent d'agir sur la réalité, de la transformer, de découvrir certains PROCESSUS LOGIQUES, et par conséquent ECONOMIQUES, de notre raisonnement.

Le fait d'agir dans des situations différentes, de découvrir et de respecter des règles et des lois dans de nouvelles activités, lui permet de créer des modes de comportement qui le conduisent à découvrir les notions qui constituent avant tout les étapes fondamentales de son développement intellectuel et ensuite les lois logiques qui régissent toute activité scientifique.

(1) Nous signalons un bon livre pour les instituteurs: B.H. Arnold, concetti intuitivi della topologia elementare, A. Martello Editore-Milano.